MANAGEMENT

**Année 2006**

**Concours d'entrée en 1ère année**

# Epreuve de Mathématiques

Durée : 4 heures

Coefficient : 12

**AVERTISSEMENT :**

Dans l'évaluation des copies, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction, notamment pour ce qui est de la présentation, de la clarté des raisonnements et de la concision.

**L'épreuve comporte un problème et un exercice indépendants, ils doivent être rédigés sur des copies séparées.**

Problème : 14 points
Exercice : 6 points

N.B.: Ce document comporte 5 pages.

# Problème sur 14 points.

---

## Première partie.

1) On définit la suite $(T_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients réels, éléments de $\mathbb{R}[X]$, en posant :

$$\begin{cases} T_0(X) = 1 \\ T_1(X) = X \\ \text{Pour tout entier } n \geqslant 1,\ T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X). \end{cases}$$

2) a) Montrer que, pour tout entier $n$, le degré du polynôme $T_n$ est égal à $n$.

   b) Déterminer le coefficient du terme de plus haut degré du polynôme $T_n$.

   c) Montrer que, pour tout entier $n$ et pour tout réel $\theta$ :

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta.$$

3) Soit $N$ un entier naturel, montrer que la famille de polynômes $(T_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ est une base de l'espace $\mathbb{R}_N[X]$, ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur à $N$.

4) Montrer que, pour tout couple $(n,m)$ d'entiers naturels, l'application $x \mapsto \dfrac{T_n(x)\,T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$.

5) Calculer, pour tout couple $(n,m)$ d'entiers naturels, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{T_n(x)\,T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

## Deuxième partie.

1) Vérifier que l'application définie sur $(\mathbb{R}[X])^2$ par :

$$(P|Q) = \int_{-1}^{+1} \frac{P(x)\,Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. $\mathbb{R}[X]$ désignera l'espace préhilbertien réel muni du produit scalaire précédent. On notera $\|.\|$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

2) Soit $N$, un entier naturel quelconque, $B$ la base canonique de $\mathbb{R}_N[X]$ égale à $\left(1, X, X^2, \ldots X^N\right)$. Déterminer, en fonction des polynômes $T_n$ de la première partie, la base orthonormée $B'$ déduite de la base $B$ par le procédé de Schmidt.

3) On note $\pi_N$ la projection orthogonale sur l'espace $\mathbb{R}_N[X]$ dans l'espace préhilbertien $\mathbb{R}[X]$.

   a) Pour tout polynôme $P$ de $\mathbb{R}[X]$, exprimer le projeté orthogonal $\pi_N(P)$ à l'aide des polynômes $T_n$ de la première partie.

b) On rappelle que $d(P, \mathbb{R}_N[X])$ désigne la distance du polynôme $P$ au sous-espace $\mathbb{R}_N[X]$ , et qu'elle est définie par :

$$d(P, \mathbb{R}_N[X]) = \inf_{Q \in \mathbb{R}_N[X]} \|P - Q\| .$$

Exprimer la distance $d(P, \mathbb{R}_N[X])$ à l'aide du polynôme $P$ et des polynômes $T_n$ de la première partie.

4) Dans cette question, on désire calculer le produit scalaire $\left(X^{2N} | T_k\right)$ pour tout entier $k$ vérifiant $0 \leqslant k \leqslant 2N-1$. On note alors :

$$I_{2N,k} = \int_0^\pi (\cos t)^{2N} \cos(kt)\, dt.$$

a) Soit $t$ un réel de l'intervalle $[0, \pi]$ . On pose $z = e^{it}$, exprimer $(\cos t)^{2N}$ en fonction de $z$.

b) Exprimer, pour tout réel $t$ de l'intervalle $[0, \pi]$, le nombre $(\cos t)^{2N}$ en fonction des nombres $T_n(\cos(t))$ , définis dans la première partie pour tous les entiers naturels $n$.

c) Calculer $I_{2N,0}$ en fonction de coefficients binomiaux.

d) Calculer, si $N$ est supérieur ou égal à 1, pour tout entier $k$ vérifiant $1 \leqslant k \leqslant 2N-1$, l'intégrale $I_{2N,k}$.

e) En déduire la distance de $X^{2N}$ au sous-espace $\mathbb{R}_{2N-1}[X]$ .

## Troisième partie.

Dans cette partie, on appelle $E$ l 'ensemble des applications de classe $C^1$ définies sur $[-1, 1]$.

1) Montrer que l'application définie sur $E \times E$ par :

$$(f|g) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\, g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

est un produit scalaire sur $E$.

2) Vérifier que l'ensemble des applications polynômes définies sur $[-1, 1]$ est inclus dans l'ensemble $E$. On notera encore $\mathbb{R}[X]$ cet ensemble, on considère de même que $\mathbb{R}_N[X]$ est inclus dans $E$ pour tout entier naturel $N$.

3) Soit $h$ l 'application définie sur $[-1, 1]$ par :

$$h(x) = \frac{1}{\frac{5}{4} + x}.$$

a) Montrer que l'application $h$ appartient à l'ensemble $E$.

b) Soit $\widetilde{h}$ l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\widetilde{h}(t) = h(\cos(t)).$$

$\alpha$) On pose $u = e^{it}$, exprimer $\widetilde{h}(t)$ en fonction de $u$.

$\beta$) Montrer que $\widetilde{h}(t)$ peut s'écrire comme somme de deux séries entières de variables respectives $u$ et $\frac{1}{u}$.

$\gamma$) En déduire le développement de $\widetilde{h}$ en série de Fourier.

c) Soit $N$ un entier naturel, on note, comme dans la deuxième partie, $\pi_N$ la projection orthogonale sur l'espace $\mathbb{R}_N[X]$.

$\alpha$) Calculer, pour tout entier naturel $n$, le produit scalaire $(h|T_n)$ (le polynôme $T_n$ a été défini dans la première partie).

$\beta$) En déduire la distance de $h$ au sous-espace $\mathbb{R}_N[X]$.

## Exercice sur 6 points.

---

Soit $E$ un espace vectoriel sur le corps des complexes, de dimension finie $n > 0$. On désigne par $f$ une application linéaire de $E$ dans $E$, on note $rg(f)$ , le rang de l'application $f$.

### Première partie.

On suppose dans cette partie , que $r$ est un entier compris entre 1 et $n$ et que l'on a :

$$rg(f) = rg\left(f^2\right) = r.$$

1) Montrer que :
$$Ker f \oplus Im f = E.$$

2) En déduire qu'il existe une base $B$ de $E$ et une matrice carrée $A$, d'ordre $r$, inversible, telles que la matrice $M$ représentative de l'application $f$ dans la base $B$ s'écrive par blocs sous la forme :
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

3) On admettra que le polynôme caractéristique de la matrice $A$ est un polynôme annulateur de la matrice $A$.
Montrer qu'il existe un polynôme annulateur de la matrice $M$ de degré $r + 1$.

### Deuxième partie.

On suppose, dans cette partie, que $r$ est un entier compris entre 1 et $n$, $p$ un entier compris entre 0 et $r - 1$, et que l'on a :

$$\begin{cases} rg(f) = r \\ rg\left(f^2\right) = p \end{cases}$$

1) L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ? Justifier.
2) Déterminer, en fonction des entiers $r$ et $p$, la dimension du sous-espace vectoriel $Ker f \cap Im f$.
3) Montrer qu'il existe une base $B$ de $E$, des matrices $Y_1$ et $Y_2$ à $r - p$ lignes et $p$ colonnes, une matrice $Y_3$ à $n - 2r + p$ lignes et $p$ colonnes, une matrice $Y_4$ carrée d'ordre $p$, telles que la matrice $N$ représentative de l'application $f$ dans la base $B$ s'écrive par blocs sous la forme :
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & Y_1 \\ I_{r-p} & 0 & 0 & Y_2 \\ 0 & 0 & 0 & Y_3 \\ 0 & 0 & 0 & Y_4 \end{pmatrix}$$
où $I_{r-p}$ désigne la matrice identité d'ordre $r - p$.
4) Montrer que $Y_4$ est une matrice inversible.
5) Exprimer le polynôme caractéristique de la matrice $N$ en fonction du polynôme caractéristique de la matrice $Y_4$.